

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Мурманская область

Шифр участника: М1106

Класс: 11

Количество баллов: 21

Результат участия: призер



№5

МНОБ

Возьмем множество:
 $\{0\}$

и постараемся сделать
его правильным.

$0 = a + a$; a - действ. число

Сравнительно в множество

A включаются все

5	6	7	8
7	0	5	0

числа вида:

$$a \cdot (-a) = -a^2$$

На данном этапе множество A

имеет вид:

$$A = \{0; -1; -4; -9; \dots\}$$

Рассмотрим число -1

$$-1 = 1 + (-2)$$

Тогда число $1 + (-2) = -2$, также включается
в множество A

$$\text{Но } -2 = 1 + (-3) \Rightarrow \{-3\} \in A$$

$$-3 = 1 + (-4) \Rightarrow \{-4\} \in A \dots$$

Таким образом мы доказали, что
все целочисленные числа принадлежат
A :

$$A = \{0, -1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Рассмотрим число -2 :

$$-2 = (-1) + (-1) \Rightarrow (-1)^2 = 1 \in A$$

рассмотрим -3

$$-3 = (-2) + (-1) \Rightarrow (-2) \cdot (-1) = 2 \in A$$

Любое число a можно представить в виде:

$$a = (a+1) + (-1)$$

$$\text{Тогда число } (a+1) \cdot (-1) = -a-1 \in A$$

Но a принимает все отрицательные
значения тогда множество
всех чисел вида $-a-1$ есть
множество натуральных чисел
получили :

$$A = (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
 ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
 ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
 "Мурманский областной
 центр дополнительного
 образования детей
 "ЛАПЛАНДИЯ"
 183031, г. Мурманск,
 пр. Героев-Североморцев, 2
 тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20____ г.
 на исх. № _____ от "____" _____ 20____ г.

МНОБ

Это есть если

A содержит 0 , то

A - полное, только

при условии $A = \mathbb{Z}$

Докажем, что не
существует полного
множества без $\{0\}$

Пусть A - полное непустое множество
($0 \notin A$), а b - его элемент, но

$b = b + 0$, тогда число

$b - 0 = 0 \in A$, что противоречит
условию. Значит $0 \in A$, но

тогда единственное полное множество
есть множество целых чисел.

Ответ: существует единственное
полное множество: $A = \mathbb{Z}$

1. Рассмотрим близкий мальчик к девочке с 10 парами, образующую с ней одну из пар. Есть два варианта расположения мальчика относительно какой-либо другой пары. ?

1-й: он находится на "правильной" дуге, т.е. на дуге с равным кол-вом мальчиков и девочек (читая его самого)

2-й: он находится вне этой пары дуги.

Однако рассмотрим хорошую пару в нашей кривой. Пусть на "правильной" дуге k мальчиков и k девочек тогда на другой дуге:

$n-1-k$ мальчиков и $n-1-k$ девочек, т.е. и эта дуга правильная.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

М1106

2. Таким образом,
нам нужно доказать,
что наш мальчик
обязательно "найдёт"
девочку внутри
фиги, образованной
девочкой ~~и~~ с 10 парами
с фигурой ~~и~~
мальчиком

3. картина следующая:

Гф Жф; Жмн М $\leftarrow$ У-1.мн; Уфв НМ
↑
девочка с 10 парами Наш мальчик

4. рассмотрим пространство

Гф Хф; Хм НМ

докажем, что наш мальчик не имеет
парн внутри этого пространства

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20____ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20____ г.

$n-k$ мальчиков

М1106

$n-k-1$ девочек

$n-k > n-k-1$

что невозможно

значит слева от

мальчика нет

пары, кроме главной девочки

7. Рассмотрим пространство:

NM $y-1$ м; y ф M

если считать весты отсчит от
мальчика (в этом

как мы видим, если считать
количество мальчиков и девочек от
 NM (включительно) до мальчика (не включ.)
то они окажутся равными:

$$N_f = N_m = y$$

то есть обязательно при обходе
слева направо кол-во девочек станет
равным кол-ву мальчиков, то есть

у НМ появлялась пара

8. Таким образом, внутри каждой пары с ГФ НМ имели пару

Всего у ГФ 9 пар (не считая пары с НМ)

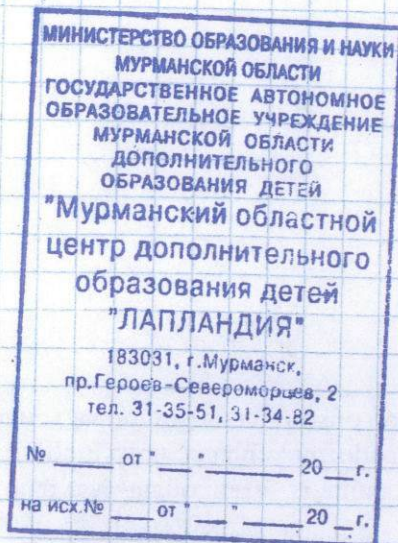
Тогда у ^{каждого} мальчика тоже 9 пар + 1 пара с ГФ т.е. всего ~~9~~ 10 ч.т. ф.

№6

Возьмем одну сферу. Пусть она будет красная.

Тогда следующая сфера должна быть зелёной (наша цель: каждой новой сферой получить максимально возможное количество новых точек)

получим одну новую точку (1)



добавили ещё красную M1106

сферу +1 точка (2)

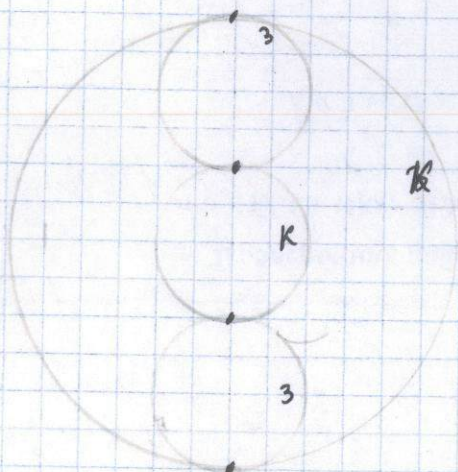
теперь у нас есть
две красные сферы,
значит новая зелёная
сфера даст 2 точки (4)

добавили ещё сферу

+1 точка (2)

зелёного цвета

После этого мы можем поставить
красную сферу так, чтобы она
касалась двух зелёных +2 (4)



15

~~Нужно~~ доказать, что $A = \mathbb{R}$ -
наименьшее множество (м.н.
 $a+b; ab \in \mathbb{R}$)

Докажем, что $0 \in A$ всегда.

Действительно, пусть

$0 \notin A$ и при этом $a \in A$ ($A \neq \emptyset$),

то $a = a+0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0 \in A$, но

это противоречит условию минимальности предположения. Тогда $0 \in A$

~~0 можно представить, как~~

~~$0 = b \cdot 0$, где $b \in \mathbb{R}$~~

~~но тогда $b+0 = b \in A$ (м.н. $0 \in A$),~~

вместо $\left(\begin{array}{l} 0 = b + (-b) \quad b \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

тогда $-b^2 \in A$ ~~также~~

~~$-b^2 - 1 + 1 = -b^2 \Rightarrow -b^2 - 1 \in A$~~

вместо ~~так~~ $-\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} = -b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{4} \in A$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20__ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

любое действительное число

можно

представить в виде:

$$\begin{aligned} & -b^2 \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{4} \quad \text{если } x \leq 0: -\sqrt{|x|}^2 \\ & \text{если } x > 0: \sqrt{\frac{x}{2}}^2 \end{aligned}$$

при этом:

$$\begin{aligned} & -b^2 \in \mathbb{R} \\ & \text{и } \frac{b^2}{4} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

тогда есть множество $\{-b^2\} \cup \{\frac{b^2}{4}\}$

$$\begin{cases} -b^2 \in A \\ \frac{b^2}{4} \in A \end{cases} \Rightarrow x \in A$$

то x - любое действительное
число: тогда A - полное множество
только при $A = \mathbb{R}$

ответ: существует только одно полное
множество $A = \mathbb{R}$



М1106

N2

$$xyz \geq xy + yz + zx$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$z > 0$$

Поделим обе части

на xyz , т.к. числа
положительные знак
сохранится:

$$1 \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

т.к. числа положительные:

$$\begin{cases} \frac{1}{z} \leq 1 \\ \frac{1}{x} < 1 \\ \frac{1}{y} < 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} z > 1 \\ x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

сравним числа $\sqrt{xyz}$ и $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$
 $\sqrt{xyz}$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

$\sqrt{xyz} > 0$. Тогда поделив обе части
на $\sqrt{xyz}$ неравенство не изменит знак

1	2	3	4
3	0	0	4

Подпись: [Signature]

$$1 \quad \frac{1}{\sqrt{yx}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{zy}}$$

$$xyx \geq xy + yz + zx$$

$$x(yz - y - z) \geq yz$$

$$\frac{1}{x} \leq 1 - \frac{y+z}{yz}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{yz} < 1$$

$$\begin{aligned} y+z &< yz \\ \text{аналогично} \\ x+z &< xz \\ y+x &< yx \end{aligned}$$

N1

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

м.р. корней у трех-качеств

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &> 0 \\ c &> 0 \end{aligned}$$

b - рационально

$$f(c) = ac^2 + (b+1)c \quad \text{или} \quad c$$

иррационально

Пусть c иррационально, тогда

$$f(c) = ac^2 + (b+1)c - \text{рационально}$$

можно видеть, что это возможно
при $a = \frac{-(b+1)}{c}$

$$f(c) = \frac{-(b+1)}{c} \cdot c^2 + (b+1) \cdot c = 0 - \text{рацион.}$$



M1106

Подставили это

значение a в

Дискриминант:

$$D = b^2 + \frac{4(b+1)}{c} \cdot c =$$

$$= b^2 + 4b + 4 = (b+2)^2$$

т.к. b - рационально

D также рационален

Ответ: да, может

$$f(c) = ac^2 + (b+1)c$$

$$a > 0$$

$c > 0$ (т.к. c иррац.)

$$\Rightarrow ac^2 + (b+1)c > 0$$

$$f(c) = ac^2 + (b+1)c$$

$(b+1)/c$ - иррац.

Для того чтобы $f(c)$ было
рационал

$$f(c) = ac^2 + (b+1)c = \underline{(ac+b+1)c}$$

единственное возможное
рациональное значение $f(c) = 0$
при $a = \frac{-b-1}{c}$

Подставим это значение в
дискриминант:

$$D = b^2 - 4 \cdot \frac{(-b-1)}{c} \cdot c = (b+2)^2 \geq 0$$

Но это противоречит условию.
Значит ~~если~~, если c иррационально
дискриминант не может быть
рациональным.

Пусть c - рационально, но
 $f(c) = ac^2 + (b+1)c$ - иррационально
т.к. $(b+1)c$ и c^2 рациональны,
 a - иррац.

Подставим в дискриминант:
 $D = b^2 - 4c \cdot a$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
 ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
 ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
 "Мурманский областной
 центр дополнительного
 образования детей
 "ЛАПЛАНДИЯ"
 183031, г. Мурманск,
 пр. Героев-Североморцев, 2
 тел. 31-35-51, 31-34-82
 № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
 на иск. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

b^2 - рац.

$4c$ - рац.

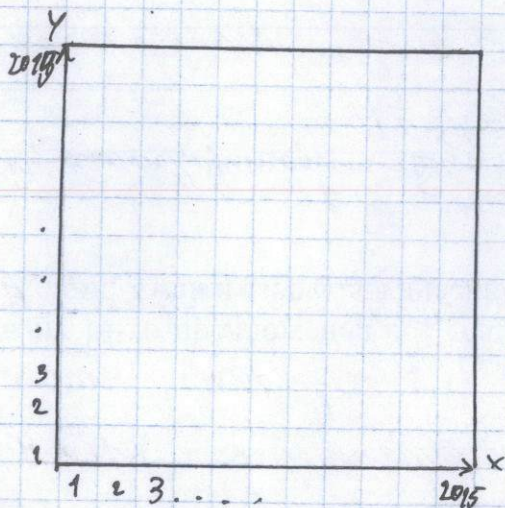
a - иррац.

Т.к. дискриминант
иррационален.

Получается, дискриминант
тринома $\Delta(x)$

не может быть рациональным
ответ: нет, не может.

№4



~~Поместить~~ середину колон

Поместить детектор в середину
столбца $(1; y) : (1; 2008)$

Заметим, что нельзя поместить
корабль так, чтобы он находился
в столбце 1 и при этом
не располагался на детекторе.
~~Нельзя сделать~~

Вместо этого поместим детектор
в середину строки $(x; 1)$

Теперь поместим детекторы
в середину ~~столбцов~~ ~~строк~~ столбцов от
2 до $2015 - 1500 = 515$
и строк от 2 до 515

Утверждение: если не "горит" ни
один детектор в середине столбцов,
то корабль примат к краю и
координата его левого борта 516

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от "____" _____ 20__ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20__ г.

М 1106

действительно, если
не "горит" ни один
индикатор по координатам
его левого борта
может принимать
значения от
516 до 2015, но т.к.

ширина корабля 1500 индивидуальных
координата левого борта:

$$(2015 - 1500) + 1 = 516$$

т.е. единственно возм. координата:
516

Аналогично и для наших детекторов
в средней строк
таким образом, была смотрим
на самый левый ств и самый
правый детектор, к-е активировались
это будут координаты левого
и правого бортов (516, если детекторы
не активны)

А вместе они составляют координаты
любого минского угла корабля, ~~то~~
и по нему уже ясно расположение
всего корабля.

Таким образом всего детекторов:
 $k = 515 \cdot 2 = 1030$

Если мы уберём один из детекторов,
то одна из строк/столбцов не
будет сообщать о наличии корабля
в ней, но есть будет возможность
два положения корабля (есть/нет
в строке/столбце)

Поэтому ^{при} меньше k не существует
~~для~~ расстановки для обнаружения
корабля

Ответ: 1030.

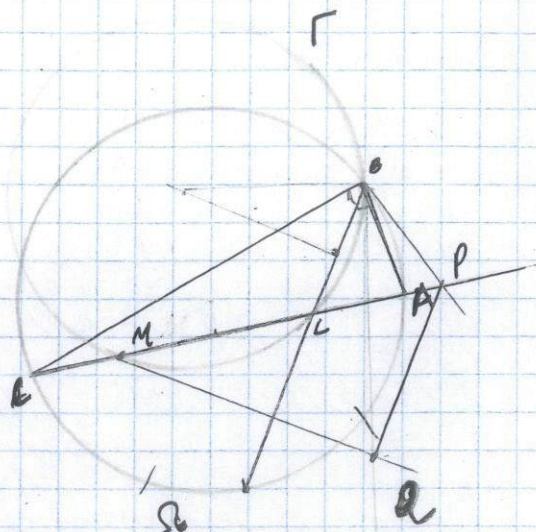
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"

163031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел: 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

М.1106



12

$$xyz \geq xy + yz + xz$$

поделены на части на $xyz > 0$

$$1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{matrix} x > 1 \\ y > 1 \\ z > 1 \end{matrix}$$

$$xyz \geq xy + yz + xz$$

$$x \geq \frac{yz}{yz - y - z}$$

$$\frac{1}{x} \geq 1 - \frac{y+z}{yz} \Rightarrow y+z < yz$$

Аналогично

$$\begin{cases} x+y < yx \\ x+z < xz \\ y+z < yz \end{cases} \quad (1)$$

сравним $\sqrt{xyz}$ и $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$
 $\sqrt{xyz}$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

получим обе части при $\sqrt{xyz} > 0$

$$1 \quad \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yx}}$$

из (1) ^{система $x, y, z \geq 1$} следует

$$\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yx}} \geq \frac{1}{\sqrt{y+x}} + \frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} \quad (2)$$

сравним 1 и правую часть (2)

$$1 \quad \frac{1}{\sqrt{y+x}} + \frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}}$$

$$\sqrt{(y+x)(x+z)(y+z)}$$

$$\sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} + \sqrt{y+z}$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
 ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
 ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
 "Мурманский областной
 центр дополнительного
 образования детей
 "ЛАПЛАНДИЯ"
 183031, г. Мурманск,
 пр. Героев-Североморцев, 2
 тел. 31-35-51, 31-34-82
 № _____ от "____" _____ 20 ____ г.
 на исх. № _____ от "____" _____ 20 ____ г.

$$\sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} + \sqrt{y+z} < \text{МНОГ}$$

$$x+z+y+x+y+z \text{ (т.к. } x, y, z > 1) <$$

$$< xz + yz + xy \text{ (по (1))} <$$

$$< xyz \text{ по условию}$$

$$xyz > \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} + \sqrt{y+z}$$

$$\sqrt{xyz} > \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{x+z}{xz}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{y+z}{yx}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{y+x}{yz}}$$

$$\sqrt{y} > \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{\frac{x+z}{xz}} < \frac{1}{\sqrt{y}} < 1 \text{ (из (2))}$$